Kansverdelingen en de NumWorks

Met de NumWorks kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de NumWorks en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.
Loop (ook) eerst het practicum: **Simulaties en telsystemen** door.

Inhoud

1 De binomiale kansverdeling 2
2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen 4
3 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties 5
4 De normale kansverdeling 6
5 Grenswaarden bij normale kansverdelingen 7
6 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden 8
7 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen 9



1 De binomiale kansverdeling

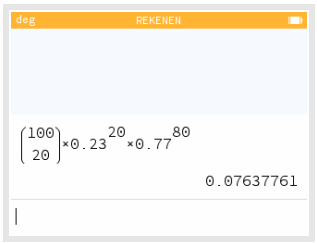
Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1-0{,}23=0{,}77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$P(X=k)=\binom{100}{k}\cdot 0{,}23^{k}\cdot 0{,}77^{100-k}$$

hierin is: $\binom{100}{k}=\frac{100!}{k!(n-k)!}$ wat je op de NumWorks vind in de “Toolbox”.

De kans $P(X=20)$ is dan gewoon in het menu **REKENEN** te bepalen:

- kies paste en ga naar Combinatoriek en kies binomial(n,k);
- maak dan $\binom{100}{20}\cdot 0{,}23^{20}\cdot 0{,}77^{80}$ en kies OK of EXE.



Het antwoord zie je in het venster hiernaast.

Dit kan echter gemakkelijker. De NumWorks kent namelijk de binomiale kansverdeling waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

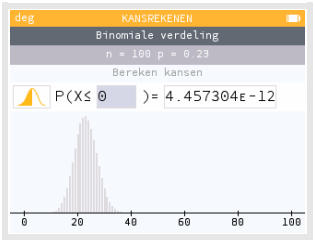


- kies paste en ga naar Kansverdelingen en kies "Binomiale verdeling" en binompdf(m,n,p);
- voer vervolgens in 20, 100 en 0.23 (in die volgorde) en OK;
- je krijgt meteen de gevraagde kans.

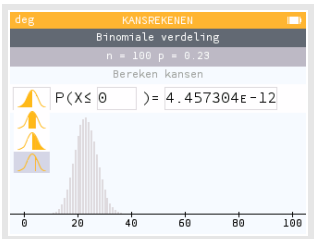
Op deze manier kun je ook $P(X\leq 20)$ berekenen door binomcdf(m,n,p) te kiezen. Voor andere varianten moet je vervolgens omrekenen:

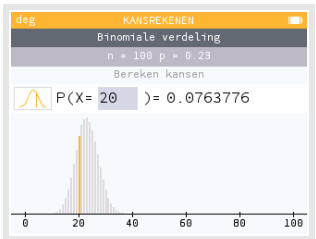
- $P(X<20)=P(X\leq 19)$
- $P(X\geq 20)=1-P(X\leq 19)$
- $P(X>20)=1-P(X\leq 20)$
- $P(10\leq X\leq 20)=P(X\leq 20)-P(X\leq 9)$
- enzovoort...

Maar dit alles kan veel visueler via het menu **KANSREKENEN**.



- Kies in dat menu voor Binomiaal en OK;
- kies dan $n=100$ en $p=0{,}23$ en Volgende en je krijgt het scherm hiernaast.
- Omdat je $P(X=20)$ wilt weten, ga je met de pijltjestoetsen eerst naar het oranje icoontje en OK.
- Kies nu het icoontje met het enkele staafje en OK;
- voer tenslotte 20 in en OK of EXE, zie figuren.





Je vindt dezelfde kans als eerder. Je ziet ook meteen de complete kansverdeling en door andere waarden in te voeren vind je ook de andere kansen.

Even narekenen

Als een variabele X binomiaal is verdeeld met $n = 100$ en $p = 0{,}23$ dan kun je de volgende binomiale kansen berekenen met de NumWorks door de juiste versie van de vier oranje icoontjes te kiezen:

a. $\mathrm{P}(X = 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}0763...$
b. $\mathrm{P}(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}2810...$
c. $\mathrm{P}(X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = \mathrm{P}(X \leq 19 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}2046...$
d. $\mathrm{P}(X \geq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}7953...$
e. $\mathrm{P}(X > 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = \mathrm{P}(X \geq 21 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}7189...$
f. $\mathrm{P}(11 \leq X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}2803...$



2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen

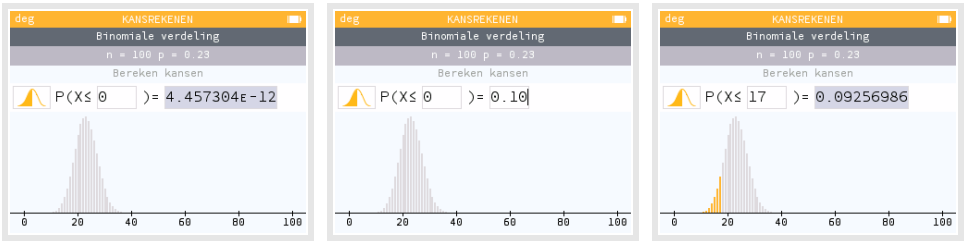
Vooral bij het toetsen van hypothesen wil je **grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen**.
Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $\mathrm{P}(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}10$.

Dit kan in het menu **REKENEN**:

- kies (paste) en ga naar Kansverdelingen, kies “Binomiale verdeling” en invbinom(a,n,p);
- voer vervolgens in 0.10, 100 en 0.23 (in die volgorde) en OK;
- je krijgt meteen de gevraagde grenswaarde 17.

Maar ook dit is mooier zichtbaar via het menu **KANSREKENEN**.
Je kiest Binomiaal en vult de juiste waarden voor n en p in.
Nu moet je het juiste oranje icoontje kiezen en de kans 0,10 invullen en OK of EXE.
In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet.
De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.



Er zijn weer varianten mogelijk, bijvoorbeeld:

- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\mathrm{P}(X < g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\mathrm{P}(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  De waarde 17 die je krijgt is dan dus $g - 1$, zodat nu $g = 18$.
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\mathrm{P}(X \geq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je het oranje icoontje bij het groter-of-gelijk teken.
  Ga na, dat nu $g = 29$.

3 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties

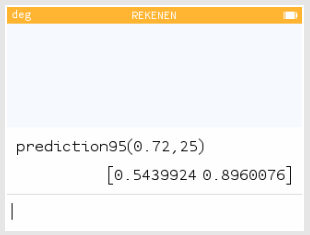
(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A maar het komt niet precies overeen met de daar gebruikte formulekaart. Het onderstaande betrouwbaarheidsinterval is nauwkeuriger.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.
Het aantal successen in deze steekproef is 18.

Hierbij hoort een proportie van $p = \frac{18}{25} = 0{,}72$.

Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie.



- Kies in het menu **REKENEN** voor de Toolbox, ga naar Statistische intervallen, kies prediction95(p,n) en OK;
- voer vervolgens in 0.72 en 25 (in die volgorde) en OK;
- je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval 0,5439924; 0,8960076.

In drie decimalen nauwkeurig ligt het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie tussen 0,544 en 0,896.

Opmerking:
Gebruik alleen prediction95(p,n).
Het vereenvoudigde betrouwbaarheidsinterval wordt niet gebruikt op havo/vwo.

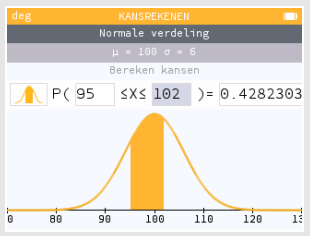
4 De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de NumWorks.

Via het menu **REKENEN**:

- $P(95 < X < 102 \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0{,}4282...$
  Kies de Toolbox en ga naar Kansverdelingen, kies “Normale verdeling” en norm-cdf2(a,b,μ,σ);
  voer vervolgens in 95, 102, 100 en 6 (in die volgorde) en OK.
- $P(X < 95 \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0{,}2023...$
  Kies de Toolbox en ga naar Kansverdelingen, kies “Normale verdeling” en norm-cdf(a,μ,σ);
  voer vervolgens in 95, 100 en 6 (in die volgorde) en OK.
- $P(X > 95 \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 1 - P(X < 95 \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0{,}7976...$

Via het menu **KANSREKENEN**:



- $P(95 < X < 102 \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6)$ gaat zo:
  Kies in het Kansrekenen-menu voor Normaal en OK;
  kies dan $\mu = 100$ en $\sigma = 6$ en Volgende en je krijgt het scherm hiernaast;
  ga met de pijltjestoetsen eerst naar het oranje icoontje en OK;
  kies nu het icoontje met twee grenzen en OK;
  voer tenslotte 95 en 102 in en OK of EXE, zie figuur.
- Voor de andere twee hiervoor berekende kansen moet je nu een ander oranje icoontje kiezen en de invoer aanpassen.

5 Grenswaarden bij normale kansverdelingen

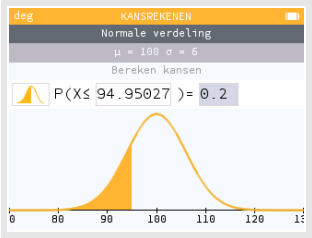
Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de NumWorks. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

Via het menu **REKENEN**:

- $\mathrm{P}\left(X < g \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$
  Kies de Toolbox en ga naar Kansverdelingen, kies "Normale verdeling" en invnorm(a,μ,σ);
  voer vervolgens in 0.20, 100 en 6 (in die volgorde) en OK;
  je vindt $g = 94{,}95027\ldots$ dus $g \approx 95$.
- $\mathrm{P}\left(X > g \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$ geeft $\mathrm{P}\left(X < g \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}80$
  Dit doe je dan op een vergelijkbare wijze, nu krijg je $g \approx 105$.

Loop al deze berekeningen zelf na!

Via het menu **KANSREKENEN**:



- $\mathrm{P}\left(95 < X < 102 \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right)$ gaat zo:
  Kies in het Kansrekenen-menu voor Normaal en OK;
  kies dan $\mu = 100$ en $\sigma = 6$ en Volgende en je krijgt het scherm hiernaast;
  ga met de pijltjestoetsen eerst naar het oranje icoontje en OK;
  kies nu het icoontje met alleen een rechtergrens en OK;
  voer tenslotte 0,20 in en OK of EXE, zie figuur.
- Voor de andere hiervoor berekende grenswaarde moet je nu het oranje icoontje kiezen met alleen een linker grens.

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!

6 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Dat bereken je in het menu **REKENEN**.

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma_X = 4$.
Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.
Het gemiddelde van deze steekproef $\overline{X} = 21{,}5$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is met standaardafwijking $\frac{4}{\sqrt{25}} = 0{,}8$.

- Het gevraagde betrouwbaarheidsinterval heeft ondergrens $21{,}5 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{25}} = 19{,}9$.
- Het gevraagde betrouwbaarheidsinterval heeft bovengrens $21{,}5 + 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{25}} = 23{,}1$.

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1.

7 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X de **standaardafwijking** bepalen als gegeven:

$P\left(X < 102 \,|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??\right) = 0{,}6$

Dat kan op de NumWorks via het menu **FUNCTIES**. Je voert dan de cumulatieve normale verdeling in als functie:

- ga naar het Functies-menu en ga naar f(x) en OK;
- kies de Toolbox en ga naar Kansverdelingen → Normale verdeling en normcdf(a,μ,σ);
- vul in 102,100,x en OK zodat f(x) = normcdf(102,100,x);
- ga naar g(x) en OK en maak g(x)=0.6;
- plot de grafieken en stel de assen in, bijvoorbeeld de x-as van 0 tot 20 en de y-as van 0 tot 1;
- laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 7{,}8943...$.



Zie de figuren hiernaast.
Dus is de standaardafwijking in dit geval $\sigma \approx 7{,}89$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X het **gemiddelde** bepalen als gegeven:

$P\left(X < 102 \,|\, \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}6$

Dat kan op de NumWorks via het menu **FUNCTIES**. Je voert dan de cumulatieve normale verdeling in als functie:

- ga naar het Functies-menu en ga naar f(x) en OK;
- kies de Toolbox en ga naar Kansverdelingen → Normale verdeling en normcdf(a,μ,σ);
- vul in 102, x, 6 en OK zodat f(x) = normcdf(102,x,6);
- ga naar g(x) en OK en maak g(x)=0.6;
- plot de grafieken en stel de assen in, bijvoorbeeld de x-as van 0 tot 200 en de y-as van 0 tot 1;
- laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 100{,}48...$.

Dus is het gemiddelde in dit geval $\mu \approx 100{,}5$.

Opmerking:
Je kunt via het menu **FUNCTIES** de grafiek van de normale kansverdeling met behulp van de Toolbox in beeld brengen als f(x) = normpdf(x,μ,σ) (normpdf komt van "normal probability function"). Je krijgt dan de karakteristieke klokvormige kromme in beeld. De vensterinstellingen hangen af van de waarden van μ en σ.
Op dezelfde manier kun je ook de cumulatieve normale kansverdeling in beeld brengen als f(x) = normcdf(x,μ,σ) (normcdf komt van "cumulative normal probability function").
Ook op deze wijze kun je kansen en grenswaarden berekenen.