

# Kansverdelingen met de Casio

Met de rekenmachine van Casio kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de Casio en het werken met functies op de Casio. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.

**Loop eerst het practicum: 'Simulaties en tellen met de Casio' door.**

## Inhoud

- [De binomiale kansverdeling](#)
  - [Grenswaarden bij binomiale toetsing](#)
  - [Kanshistogrammen, verwachting en standaarddeviatie](#)
  - [Betrouwbaarheidsinterval bij binomiale kansverdelingen](#)
  - [De normale kansverdeling](#)
  - [Grenswaarden bij normale kansverdelingen](#)
  - [Betrouwbaarheid bij een normale verdeling](#)
  - [Gemiddelde of standaarddeviatie bij normale kansverdeling berekenen](#)
-

## De binomiale kansverdeling

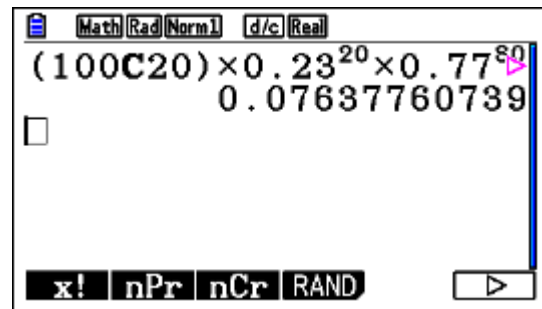
Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking  $1 - 0,23 = 0,77$  is. De toevalsvariabele  $X$  stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor.  $X$  heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$P(x = k) = \binom{100}{k} * (0,23)^k * (0,77)^{100-k}$$

hierin is:  $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(100-k)!}$  wat er op je Casio uit ziet als 100 C k.

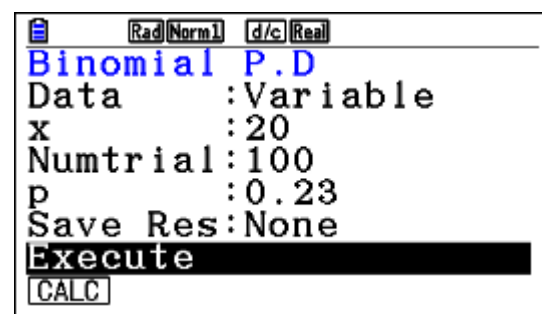
(Zie 'Simulaties en tellen met de Casio')

Dit is hoe je nu de kans op  $X = 20$  berekent:



Dit kan echter gemakkelijker. De Casio kent namelijk de functie 'Bpd' (binomial probability distribution function) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

- Ga naar **MENU**, **2** (Statistics).
- Druk op **F5** (Dist), **F5** (Binomial) en **F1** (Bpd).
- Neem de gegevens over zoals ze hiernaast staan.
- Druk op **EXE**. Het antwoord verschijnt nu op je scherm: 0.076.



De complete kansverdeling is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele  $X$  als functie in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken. Dit doe je zo:

- Ga naar **MENU**, **7** (Table).
- Druk op **OPTN**, **F6** ( $\square \rightarrow \square$ ), **F3** (Stat), **F1** (Dist), **F5** (Binomial), **F1** (Bpd).
- Vul als volgt in: BinomialPD(X, Numtrial, p), dus: BinomialPD(x, 100, 0.23).
- Druk op **EXE**.
- Druk op **F5** (Set) en laat de tabel van 0 tot 100 lopen met stapgrootte 1.
- Maak de tabel.

| X  | Y1     |
|----|--------|
| 18 | 0.0489 |
| 19 | 0.0631 |
| 20 | 0.0763 |
| 21 | 0.0869 |

Je vindt hier bij  $X = 20$  dezelfde waarde als eerder terug.

Als een variabele  $X$  binomiaal is verdeeld met  $n = 100$  en  $p = 0,23$  dan kun je de volgende binomiale kansen berekenen met de Casio:

Let op: Ga eerst naar **MENU**, **2** (Statistics).

- **$P(X = 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,0763...$** 
  - Eerst: **F5** (Dist) en **F5** (Binomial) om naar het binominaalmenu te komen.
  - Kies **F1** (Bpd).
  - Vul in:  $X = 20$ , Numtrial = 100,  $p = 0.23$ .
  - Voer berekening uit.
- **$P(X \leq 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2811...$** 
  - Kies **F2** (Bcd) in plaats van **F1** (Bpd).
  - Vul in: Lower = 0, Upper = 20, Numtrial = 100,  $p = 0.23$ .
  - Voer berekening uit.
- **$P(X < 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 19 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2047...$** 
  - Kies **F2** (Bcd)
  - Vul in: Lower = 0, Upper = 19, Numtrial = 100,  $p = 0.23$ .
  - Voer berekening uit.
- **$P(X \geq 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7953...$** 
  - Kies **F2** (Bcd)
  - Vul in: Lower = 20, Upper = 100, Numtrial = 100,  $p = 0.23$ .
  - Voer berekening uit.
- **$P(X > 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \geq 21 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7189...$** 
  - Kies **F2** (Bcd)
  - Vul in: Lower = 21, Upper = 100, Numtrial = 100,  $p = 0.23$ .
  - Voer berekening uit.

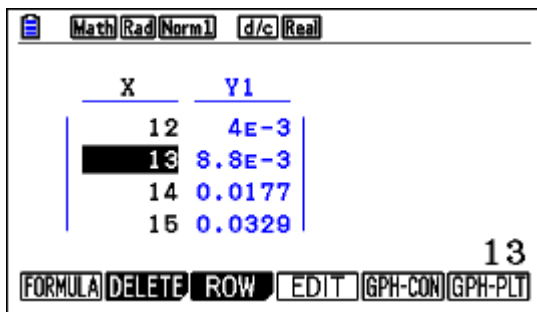


## Grenswaarden bij binomiale toetsing

Vooraf bij het **toetsen van hypothesen** wil je grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen. Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van  $g$  waarvoor:  $P(X \leq g \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$ .

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele  $X$  met  $n = 100$  en  $p = 0,23$ . Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als functie in het Y= scherm en dan de tabel van die functie (stapgrootte 1) in beeld te brengen. Dat voer je dus in als: 'Y1 = BinomialCD(x, 100, 0.23)'. In de figuur hieronder zie je hoe dat er dan uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk  $g = 13$ .



The image shows a TI-84 Plus calculator screen with the 'Y1=' screen active. The function 'BinomialCD(x, 100, 0.23)' has been entered. The table of values is displayed, showing the cumulative probability for different values of x. The value 13 is highlighted in the x column, and its corresponding cumulative probability, 8.8E-3, is shown in the Y1 column. The number 13 is also displayed in the bottom right corner of the screen.

| X  | Y1     |
|----|--------|
| 12 | 4E-3   |
| 13 | 8.8E-3 |
| 14 | 0.0177 |
| 15 | 0.0329 |



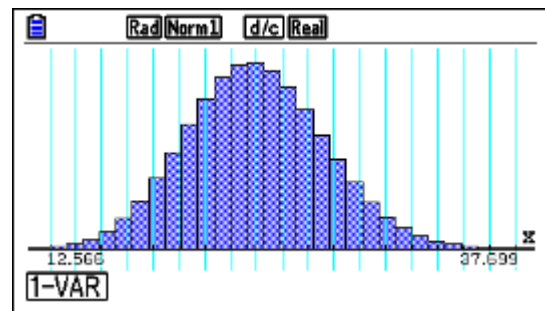
# Kanshistogrammen, verwachting en standaarddeviatie

Bij een binomiale kansverdeling kun je een **kanshistogram** maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met  $n = 100$  en  $p = 0,23$ . Dat kun je zo doen:

- Ga naar **MENU** **2** (Statistics)
- Ga op 'List 1' staan.
- Druk op **OPTN**, **F1**(List) en **F5**(Seq).
- Vul het nu in zoals hiernaast te zien is.
- Druk op **EXE**. In lijst 1 verschijnt nu een rij getallen van 0 t/m 100.

|     | List 1                | List 2 | List 3 | List 4 |
|-----|-----------------------|--------|--------|--------|
| SUB |                       |        |        |        |
| 1   | 0                     |        |        |        |
| 2   | 1                     |        |        |        |
| 3   | 2                     |        |        |        |
| 4   | 3                     |        |        |        |
|     | Seq (x, x, 0, 100, 1) |        |        |        |

- Ga nu op 'List 2' staan.
- Druk weer op **OPTN**, **F1**(List) en **F5**(Seq).
- Vul nu aan tot: 'Seq(100Cx\*0.23^(x)\*0.77^(100 - x), x, 0, 100,1)'. De functie 'BinomialPD' werkt niet in deze situatie.
- Druk op **EXE**. In lijst 2 verschijnt nu een rij kansen behorend bij de getallen 0 t/m 100 uit lijst 1. Controleer dat.
- Nu je de lijsten hebt ingevoerd, kunnen we de diagrammen gaan maken. Druk op **F1**(Graph) en **F6**(Set).
- Kies voor een histogram. Vul verder in: 'XList = List 1' en 'Frequency = List 2'.
- Druk op **EXE** en **F1**(Graph1). Laat het diagram starten bij 10 met breedte 1.
- Pas de vensterinstellingen aan. Laat x lopen van 10 t/m 40 en y van 0 t/m 0,15.



Oefen jezelf door zo een paar kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken. Cumulatieve kanshistogrammen lukken ook.

## Centrum en spreiding van een kanshistogram

Als je een kansverdeling als lijst in de Casio hebt ingevoerd (zie de voorgaande tekst), dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- De gebruikte centrummaat voor de kansverdeling van  $X$  is de **verwachting**, aangegeven met  $\mu_x$  of  $\bar{x}$
- De gebruikte spreidingsmaat heet de standaardafwijking of **standaarddeviatie**, aangegeven met  $\sigma_x$ .

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je zo te werk:

- Zorg dat lijst 1 en lijst 2 gevuld zijn, zoals hierboven aangegeven.
- Ga naar **MENU** **2** (Statistics)
- Toets **F2**(Calc) **F6**(Set) om in te stellen met welke kolommen moet worden gerekend:
- Zet 1Var XList op List1

- Zet 1Var Freq op List2
- Druk op **EXE** om dit vast te leggen en terug te gaan.
- Kies nu **F1**(1-Var)
- Lees nu de waarden voor de verwachting en de standaardafwijking af:  $\bar{x} = 23$  en  $\sigma_x = 4,20 \dots$



# Betrouwbaarheidsinterval bij binomiale kansverdelingen

(Dit wordt bijna alleen gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval.

Je kunt dit bij normale verdelingen snel bepalen met een speciale functie: z-interval.

Het gaat zo:

Opdracht:

Stochast  $X$  is binomiaal verdeeld.

Er wordt een steekproef van omvang  $n = 25$  genomen om de proportie  $p$  te schatten.

Het aantal successen in deze steekproef,  $X = 18$ .

Wat is het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie?

Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Antwoord:

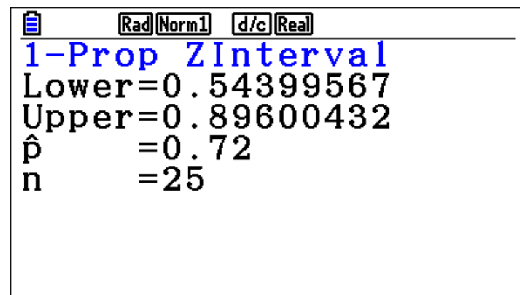
Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:

MAIN MENU -> Statistics -> Intr -> Z -> 1-Prop

Vul in: de betrouwbaarheid (als getal tussen 0 en 1),  $X$  en  $n$ .

Dit geeft het resultaat als in de afbeelding.

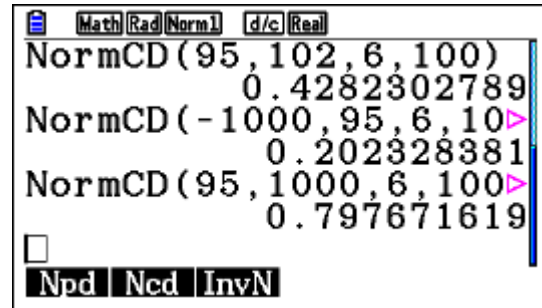
Het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie ligt dus tussen 0,441 en 0,859.



## De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele  $x$  normaal is verdeeld met een gemiddelde van  $\mu_x = 100$  en een standaardafwijking van  $\sigma_x = 6$ , dan kun je in je run-matrix de volgende kansen berekenen met de Casio:

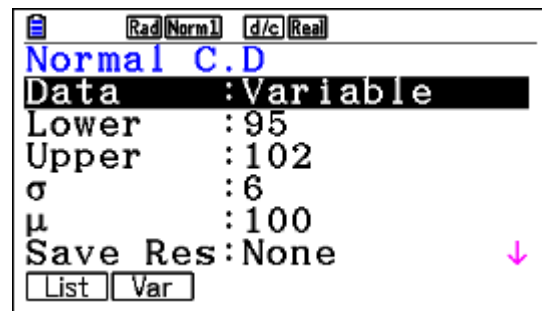
- $P(95 < X < 102 \mid \mu_x = 100, \sigma_x = 6) \approx 0,4282...$ 
  - Druk op **OPTN**, **F5** (Stat), **F3** (Dist), **F1** (Norm) en **F2** (Ncd).
  - Vul in: 'NormCD(95, 102, 6, 100)'.
- $P(X < 95 \mid \mu_x = 100 \text{ en } \sigma_x = 6) \approx 0,2023...$ 
  - Druk op **OPTN**, **F5** (Stat), **F3** (Dist), **F1** (Norm) en **F2** (Ncd).
  - Vul in: 'NormCD(-1000, 95, 6, 100)'.
- $P(X > 95 \mid \mu_x = 100 \text{ en } \sigma_x = 6) \approx 0,7976...$ 
  - Druk op **OPTN**, **F5** (Stat), **F3** (Dist), **F1** (Norm) en **F2** (Ncd).
  - Vul in: 'NormCD(95, 1000, 6, 100)'.



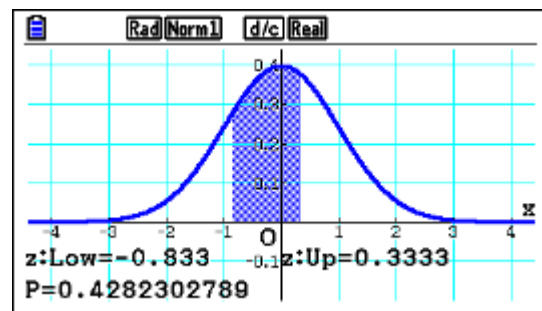
De Casio fx-CG10/20 heeft echter ook een makkelijkere functie ingebouwd voor het uitrekenen van zulke kansen. Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$P(95 < X < 102 \mid \mu_x = 100 \text{ en } \sigma_x = 6) \approx 0,4282...$

- Ga naar **MENU**, **2** (Statistics).
- Druk op **F5** (Dist), **F1** (Norm) en **F2** (Ncd).
- Vul de waarden in zoals hiernaast.
- Druk op **EXE**.



Je kunt de kans ook **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**. Hiervoor druk je op **EXIT**, ga je met je pijltjestoetsen naar 'Execute' en druk je op **F6** (Draw). De grafiek hiernaast komt nu in beeld.



## Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de Casio. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele  $x$  bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde  $g$  voor  $x$  terugzoeken:

- **$P(X < g \mid \mu_x = 100 \text{ en } \sigma_x = 6) \approx 0,2023$  geeft:  $g \approx 95$** 
  - Druk (bij 'Statistics') op **F5** (Dist), **F1** (Norm) en **F3** (InvN).
  - Je wilt alles kleiner dan een bepaalde grenswaarde dus je wilt de 'Tail' (=staart) naar links (Left).
  - Vul bij 'Area' de gegeven kans in: 0,2023.
  - Vul ook de  $\mu$  en de  $\sigma$  in.
  - Druk op **EXE**.
- **$P(X > g \mid \mu_x = 100 \text{ en } \sigma_x = 6) \approx 0,2023$  geeft:  $g \approx 105$** 
  - Dit gaat hetzelfde als hierboven, maar nu wil je de 'Tail' naar rechts (Right).

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!



# Betrouwbaarheidsinterval bij normale kansverdelingen

(Dit wordt bijna alleen gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval.

Je kunt dit bij normale verdelingen snel bepalen met een speciale functie: z-interval.

Het gaat zo:

Opdracht:

Stochast  $X$  is verdeeld met standaardafwijking  $\sigma = 4$ .

Er wordt een steekproef van omvang  $n = 25$  genomen om het populatiegemiddelde te schatten.

Het gemiddelde van deze steekproef  $\bar{X} = 21,5$ .

Wat is het 95% betrouwbaarheidsinterval?

Geef je antwoord in 1 decimaal nauwkeurig.

Antwoord:

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is.

Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:

Main Menu -> STAT -> INTR (interval) -> Z (z-interval) -> 1-SAMP

Kies bij Data: Variable

Vul de betrouwbaarheid (als getal tussen 0 en 1),  $\sigma$ ,  $\bar{X}$  en  $n$  in.

Dit geeft het resultaat als in de afbeelding.

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1

|                                                                                     |            |       |     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------|-----|------|
|  | Rad        | Norm1 | d/c | Real |
| <b>1-Sample ZInterval</b>                                                           |            |       |     |      |
| Lower=                                                                              | 19.9320288 |       |     |      |
| Upper=                                                                              | 23.0679712 |       |     |      |
| $\bar{x}$                                                                           | =21.5      |       |     |      |
| n                                                                                   | =25        |       |     |      |



# Gemiddelde of standaarddeviatie bij normale kansverdeling berekenen

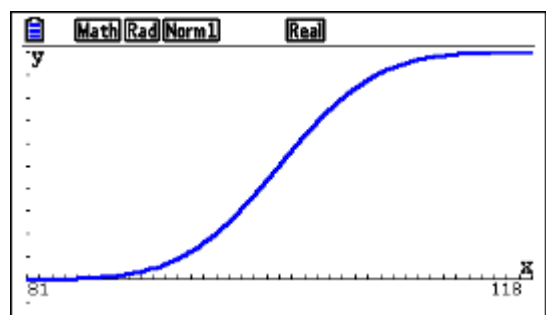
Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met normalcdf. Je kunt in het Y= scherm de *cumulatieve* normale verdeling normalcdf invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,6305...$$

- Ga eerst naar **MENU**, **5** (Graph).
- Druk op **OPTN**, **F6** ( $\square \rightarrow$ ), **F3** (Stat), **F1** (Dist), **F1** (Norm) en **F2** (Ncd).
- Vul in: 'NormCD(0, x, 6, 100)'.
- Laat de grafiek tekenen.

Voorzie nu je grafiekscherm van de goede instellingen, laat je x bijvoorbeeld lopen tussen 80 en 120 en je y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaalkromme) tussen -0,1 en 1. Zorg dat er geen functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld.



De figuur hiernaast komt dan in beeld.

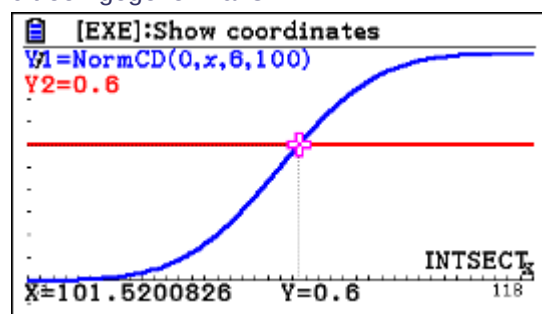
Toets nu **SHIFT** **F1** (Trace) om met de Trace-functie over de grafiek te lopen en kansen te bepalen. Typ nu je x waarde in om de precieze kans te bepalen: 0,6305...

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$$P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,6$$

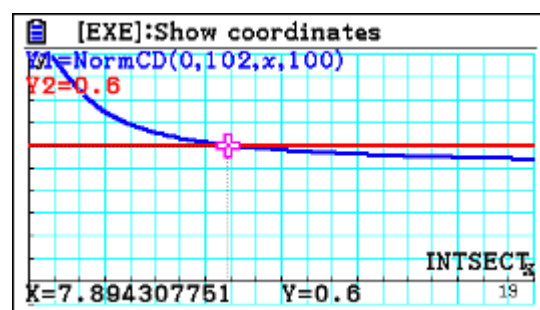
Je voert dan voor Y1 de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en voor Y2 de gegeven kans 0,6. Met behulp van intersect (**SHIFT** **F5** (G-solv), **F5** (Intsect)) vind je dat  $g = 101,52...$



Verder kun je de **standaardafwijking bepalen** als bijvoorbeeld:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??) \approx 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:



- Voer in: 'Y1 = NormCD(0, 102, x, 100)' en 'Y2 = 0.6'
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot 20 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen)
- Met intersect vind je nu als standaarddeviatie 7,8943...

Tenslotte kun je het **gemiddelde bepalen** als bijvoorbeeld:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer in: 'Y1 = NormCD(0, 102, 6, 100)' en 'Y2 = 0.6'
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu het gemiddelde!) loopt van 80 tot 120 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen)
- Met intersect vind je nu als gemiddelde 100,4799...

