Functies en de NumWorks

De NumWorks rekenmachine kan je behulpzaam zijn bij het werken met functies. Bijvoorbeeld kun je gemakkelijk nulpunten, snijpunten, oppervlakte onder een grafiek, de helling van een grafiek bepalen. Verder kun je functies eenvoudig combineren, zelfs schakelen.
Loop eerst het practicum: **Basistechnieken NumWorks** door.

Inhoud

1 Functiewaarden, nulpunten en toppen 2
2 Snijpunten van twee functies 3
3 Functies combineren 4
4 Families van functies 5
5 Hellingen van functies 6
6 Oppervlakte onder de grafiek 7
7 Functies die uit meerdere delen bestaan 8



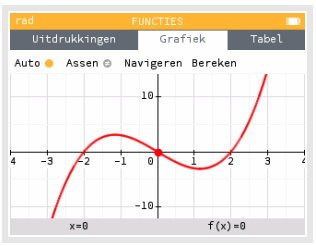
1 Functiewaarden, nulpunten en toppen

Je weet hoe je een functie kunt invoeren via het menu **FUNCTIES**. Je voert op het tabblad "Uitdrukkingen" via "Element toevoegen" een functie in, ga met ▽ naar f(x)=x en druk OK.

Vervang op de onderbalk de x door de functie: $f(x) = x^3 - 4x$ en OK.

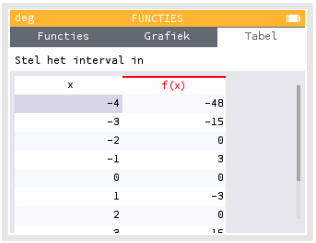


Kies "Grafiek plotten" met ▽ en OK.
Je springt nu naar het tabblad "Grafiek" en daar komt automatisch de grafiek in beeld met een punt op de grafiek. Meestal zijn de vensterinstellingen niet al te handig, die kun je aanpassen door met △ naar het subtabblad "Assen" te gaan en OK te drukken. Je kunt dan Xmin, Xmax aanpassen en dan Ymin en Ymax kiezen.



Kies bijvoorbeeld Xmin=-10, Xmax=10, Ymin=-10 en Ymax=10 en "Bevestigen".

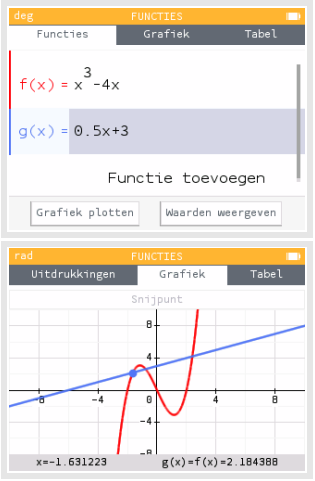
Met de pijltjestoetsen (twee keer △ en een keer ▷) ga je naar het tabblad "Tabel", waar je een tabel van de functie kunt zien. Met behulp van △ bereik je het subtabblad "Stel het interval in", waar je de instellingen van de tabel kunt aanpassen. Eindig weer met "Bevestigen". Doe dat tot je de tabel hiernaast krijgt.



Hieruit zijn enkele karakteristieken van de grafiek van deze functie (de nulpunten) eenvoudig af te lezen. Deze karakteristieken zijn ook te bepalen als de functie minder eenvoudig in beeld is te krijgen. Daartoe heeft de NumWorks het "Plotopties"-menu. Je roept dat op vanuit het tabblad "Functies" door op OK te drukken. Je ziet dan een menu waarin je kunt kiezen voor "Bereken"). Met OK krijg je een submenu waar je met de pijltjestoetsen doorheen kunt:

- Bij "Origineel" wordt een x-waarde berekend bij een y-waarde die je zelf opgeeft. Probeer maar ... , met de pijltjestoetsen vind je eventuele andere x-waarden met dezelfde functiewaarde.
- Bij "Maximum" en "Minimum" worden de x- en de y-waarden van de toppen berekend. Controleer dat $(1{,}1547; -3{,}0792)$ en $(-1{,}1547; 3{,}0792)$ de toppen van de grafiek van f zijn.
- Bij "Nulpunten" worden de snijpunten met de x-as berekend. Je krijgt eerst het linker nulpunt en met de pijltjestoetsen vind je ook het andere. Controleer dat $(-2{,}0)$, $(0{,}0)$ en $(2{,}0)$ de nulpunten van f zijn.

2 Snijpunten van twee functies



Voor het bepalen van de **snijpunten van de grafieken van twee functies** gebruik je ook het menu **FUNCTIES**. Voer bijvoorbeeld in:

$f(x) = x^3 - 4x$ en $g(x) = 0{,}5x + 3$

Als je beide invoert met dezelfde instellingen als je hiervoor alleen voor de grafiek van f hebt gebruikt, krijg je de drie snijpunten keurig in beeld. Als je de grafieken ziet kies je OK en bij "Bereken" voor "Snijpunt". Je krijgt dan het linker snijpunt van beide grafieken te zien. Met de pijltjestoetsen bereik je ook de andere twee.

Bereken de snijpunten van de grafieken van y_1 en y_2.
Als het goed is vind je (in vier decimalen nauwkeurig):
$(-1{,}6312; 2{,}1844)$, $(-0{,}7669; 2{,}6166)$ en $(2{,}3981; 4{,}1991)$.

3 Functies combineren



Je kunt met de NumWorks eenmaal ingevoerde functies ook bij andere functies weer oproepen als $f(x)$, $g(x)$, enzovoorts. Ga weer uit van de reeds ingevoerde functies f en g.

Als je de functie $h(x) = f(x) + g(x)$ wilt onderzoeken, voer je die in het Functies-menu als derde functie in.
De “f” vind je via (copy ; var) bij "Functies" en (OK). Je hoeft alleen de x nog even in te voeren.
En zo gaat de g ook.

Bekijk de grafiek van h maar eens.

Als je de grafiek van $f(x + 1)$ wilt bekijken, dan voer je deze functie bijvoorbeeld onder de vorige drie in als p(x)=f(x+1). (De naam van de functie kun je aanpassen.)

De grafiek van p is nu eenvoudig te bekijken. Vind je de grafieken van g en h daarbij maar lastig, dan kun je die functies even uitzetten. Je gaat dan met de pijltjestoetsen op de functie g (en later h) staan en selecteert de drie puntjes die rechts in de balk verschijnen, druk vervolgens op (OK).
Je krijgt dan een scherm waarin je kiest: Zet aan/uit en (OK).

Tenslotte kun je **functies schakelen**.
Neem bijvoorbeeld weer $f(x) = x^3 - 4x$ en $g(x) = 0{,}5x + 3$.
Je kunt dan $s(x) = f(g(x))$ maken door deze functie zo in te voeren (en de functienaam aan te passen).

Even oefenen

Bepaal de karakteristieken van de volgende functies:

a. $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2$
b. $g(x) = f(x - 2)$
c. $h(x) = 4 - x^2$
d. $k(x) = f(x) + h(x)$
e. $l(x) = k(0{,}5x) + 4$

4 Families van functies

Je kunt ook functies invoeren die ongeveer hetzelfde functievoorschrift hebben.

Alle rechte lijnen door (0,3) bijvoorbeeld hebben het functievoorschrift: $f(x) = ax + 3$.

Stel je voor dat je van deze rechte lijnen de grafieken wilt zien voor $a = -2$, $a = 1$, $a = 2$ en $a = 4$.

Je voert dan eerst een waarde in voor a, bijvoorbeeld $a = 1$.
Dat doe je in het menu **REKENEN**.
Je voert in $1 \rightarrow a$ door 1 in te voeren, dan shift sto→ F x^y en vervolgens de letter a via ALPHA alpha [A e^x .

Ga dat na. Vervolgens voer je de functie in het menu **FUNCTIES** in met de letter a op dezelfde manier. Denk er wel om dat het vermenigvuldigingsteken tussen a en x nodig is!

Nu kun je de grafiek bekijken met passende instellingen van het venster.

Als je voor a een ander getal kiest (op dezelfde manier als hiervoor), dan krijg je een aangepaste grafiek. Op dezelfde manier kun je grafieken bij andere families van functies tekenen.



5 Hellingen van functies

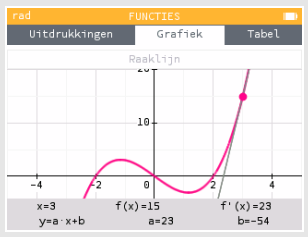
Je kunt met de NumWorks op een aantal manieren de helling van een grafiek in een bepaald punt berekenen. Je spreekt wel van het hellingsgetal of de hellingwaarde van een functie f voor een bepaalde waarde van x.

Je kunt zo'n **hellingsgetal** vinden met behulp van het menu **FUNCTIES**. Gebruik nog steeds de functie f die aan het begin van dit practicum is gegeven. Verwijder alle andere functies uit je rekenmachine.

Stel je voor dat je het hellingsgetal voor $x = 3$ wilt berekenen. Dat kan zo:

- Kies in het Functies-menu voor het tabblad Grafiek en kies OK.
- Je ziet de "Plotopties", loop naar "Hellingsgetal" en OK en kies vervolgens ⮌.
- Je ziet dan op de onderbalk $x = 0$, $f(x) = 0$ en $f'(x) = -4$.
- Dit laatste getal is het hellingsgetal voor $x = 0$.
- Met de links/rechts pijltjestoetsen ga je nu naar $x = 3$ en vind je de helling $f'(3) = 23$.

Maar je kunt het hellingsgetal voor $x = 3$ ook zo bepalen:



- Kies in het Functies-menu voor het tabblad Grafiek en verplaats het punt op de grafiek naar het punt met $x = 3$ en kies OK.
- Kies bij "Bereken" voor "Raaklijn" en OK.
- Je krijgt nu op de onderbalk onder andere het hellingsgetal als $f'(x) = 23$.
- Ook zie je de raaklijn meteen getekend met de bijbehorende formule $y = 23x - 54$.

Door met de links/rechts pijltjestoetsen het punt te verplaatsen krijg je ook bij andere punten het hellingsgetal en de raaklijn.

Bepaal zo zelf het hellingsgetal van f voor $x = -1$ en de bijbehorende raaklijn.

Maar als je het hellingsgetal wilt weten voor bijvoorbeeld $x = 1{,}5$ dan moet je eerst die x-waarde instellen door in het tabblad Grafiek gewoon 1.5 in te typen of door

- in het tabblad Grafiek op OK te drukken;
- bij "Bereken" voor "Ga naar" te kiezen en 1.5 te typen en "Bevestigen".

Je kunt nu opnieuw het hellingsgetal en de raaklijn oproepen zoals eerder.

Ook een **complete hellingsgrafiek** is mogelijk. Als je intoetst:

$$g(x) = \frac{f(x+0.0001)-f(x)}{0.0001}$$

dan is de grafiek van g een goede benadering voor de hellingsgrafiek van de gegeven functie f.

Breng zelf deze hellingsgrafiek van f in beeld.

6 Oppervlakte onder de grafiek

Ook kun je met het menu **FUNCTIES** de oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as bepalen.
Je gebruikt daarvoor de integraal van f tussen twee grenzen voor x.

Neem nog eens de grafiek van f.

- Kies in het Functies-menu het tabblad Grafiek en OK.
- Ga bij “Bereken” naar “Integraal” en OK.
- Je krijgt dan de grafiek en “Selecteer ondergrens” van het gebied onder de grafiek waarvan je de oppervlakte wilt bepalen. Loop met de links/rechts pijltjestoetsen naar het gewenste beginpunt. Toets vervolgens OK.
- Vervolgens zie je “Selecteer bovengrens”. Loop met de links/rechts pijltjestoetsen naar de gewenste waarde en OK. Ook hier kun je ook direct de x-waarde typen.
- Het bedoelde gebied wordt nu ’ingekleurd’ en de integraal komt onderaan het scherm in beeld.

Bepaal zelf de integraal tussen de grafiek van f en de x-as tussen $x = 0$ en $x = 2$.
Je vindt als alles goed gaat -4.

Let wel: dit is **niet** de oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as, maar de integraal. Dat betekent dat het gebied tussen $x = 0$ en $x = 2$ als negatief wordt geteld! De oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as tussen $x = 0$ en $x = 2$ is dus 4.
Als het gebied waarvan je de oppervlakte wilt weten zowel boven als onder de x-as ligt, moet je het bij nulpunten opsplitsen!



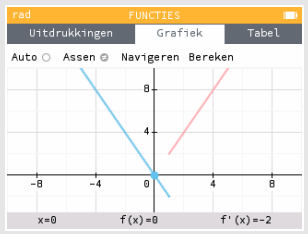
7 Functies die uit meerdere delen bestaan

Soms bestaat een functie uit meerdere delen. Stel je voor dat het voorschrift van een functie f luidt:

$f(x) = -2x$ als $x < 1$

$f(x) = 2x$ als $x \geq 1$

Om zo'n functie te kunnen invoeren in je grafische rekenmachine voer je in het menu **FUNCTIES** het voorschrift in als twee afzonderlijke functies waarvan je het domein (dat heet "Domein") instelt:



- $f(x) = -2x$ invoeren en daarna op de stippeltjes achter de functie gaan staan en OK;
  kies voor "Domein" en dan voor
  Xmin = -inf (negatief oneindig) en
  Xmax = 1 en "Bevestigen".
- $g(x) = 2x$ invoeren en daarna op de stippeltjes achter de functie gaan staan en OK;
  kies voor "Domein" en dan voor
  Xmin = 1 en
  Xmax = inf (oneindig) en "Bevestigen".
- Plot vervolgens beide grafieken.

Je krijgt dan deze figuur.
Maak zelf de grafiek.

Deze grafiek is iets anders dan die van $h(x) = |2x|$.
Die kun je maken door in het Functies-menu h(x)=|2x| (absolute waarde) in te voeren.
Je vindt die functie in de **Toolbox**, onder paste".
Maak de grafiek van h en bekijk het verschil met de grafiek van f.