

Kansverdelingen en de Casio fx-CG50

Met de Casio fx-CG50 kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de Casio fx-CG50 en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.

Loop (ook) eerst het practicum: **Simulaties en telsystemen** door.

Inhoud

1	De binomiale kansverdeling	2
2	Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen	4
3	Kanshistogrammen	5
4	Betrouwbaarheidsinterval bij proporties	6
5	De normale kansverdeling	7
6	Grenswaarden bij normale kansverdelingen	8
7	Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden	9
8	Gemiddelde of standaardafwijking berekenen	10



1 De binomiale kansverdeling

Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0,23 = 0,77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

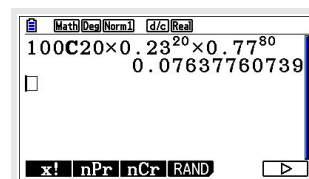
$$P(X = k) = \binom{100}{k} \cdot 0,23^k \cdot 0,77^{100-k}$$

hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(100-k)!}$ wat er op de Casio fx-CG50 uit ziet als 100 C k.

De kans $P(X = 20)$ is dan gewoon in je rekenvenster **RUN-MATRIX** te bepalen:

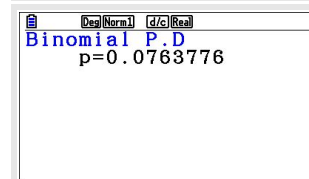
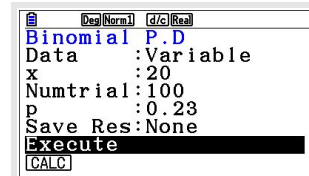
- Voer in 100 en ga naar **(F6)**(Volgende pagina) **(F3)**(PROB) **(F3)**(nCr).
- Vervolg met 20 **(x)** 0.23 **(^)** 20 **(▶)** **(x)** 0.77 **(^)** 80 en **(EXE)**.

Het antwoord zie je in het venster hiernaast.



Dit kan echter gemakkelijker. De Casio fx-CG50 kent namelijk de functie "Bpd" (binomial probability distribution function) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

- Ga naar het menu **STATISTICS**.
- Toets **(F5)**(DIST), je hebt dan het DISTR-menu (distribution = verdeling).
- Toets **(F5)**(BINOMIAL) en **(F1)**(Bpd).
- Je ziet dan een venster waarin je waarden kunt invoeren. Vul dit in zoals je in de tweede figuur ziet.
- Toets **(EXE)** het antwoord verschijnt in je scherm.



Op deze manier kun je ook $P(X \leq 20)$ berekenen door Bcd te kiezen.

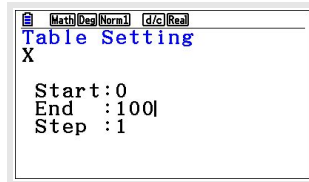
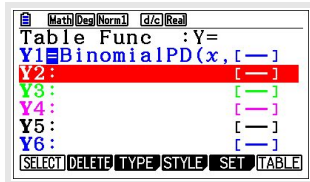
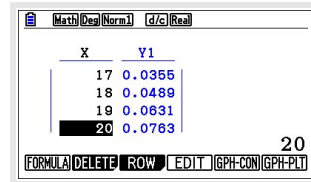
Voor andere varianten moet je vervolgens omrekenen.

Ga na:

- $P(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2810...$
(F5) **(F5)** en **(F2)**(Bcd) en vul Lower: 0, Upper: 20, Numtrial: 100 en p: 0.23 in en voer de berekening uit.
- $P(X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 19) = 0,2046...$
- $P(X \geq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 19) = 0,7953...$
- $P(X > 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7189...$
- $P(10 \leq X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9) = 0,2808...$
- $P(10 < X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2040...$

Een **complete kansverdeling** is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele X in het menu **TABLE** als functie in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken. Dat gaat zo:

- Toets **MENU** **7** om in het tabelmenu te komen.
- Toets **OPTN** **F6** (Volgende pagina) **F3** (STAT) **F1** (DIST), **F5** (BINOMIAL) en **F1** (Bpd).
- Stel via **F5** (SET) de tabel in (zie tweede figuur) en **EXE**.
- Bekijk de tabel via **F6** (TABLE), loop er met de pijltjestoetsen doorheen.

X	Y1
17	0.0355
18	0.0489
19	0.0631
20	0.0783



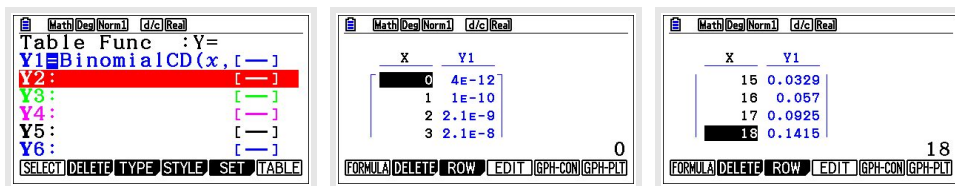
2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen

Vooraf bij het toetsen van hypothesen wil je **grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen**.

Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele x met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren in het menu **TABLE** als functie $Y1 = \text{BinomialCD}(x, 100, 0.23)$ en dan de tabel van die functie (stapgrootte 1) in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.



Er zijn weer varianten mogelijk, bijvoorbeeld:

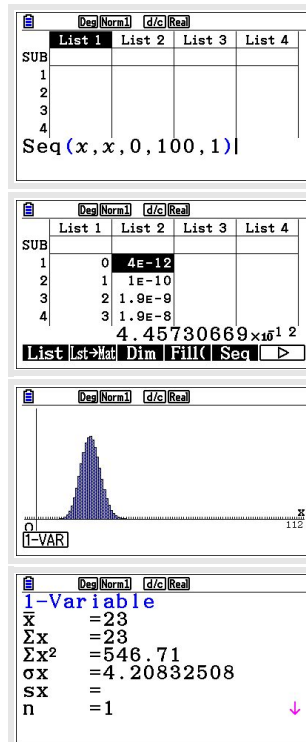
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X < g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
In dit geval gebruik je dat $P(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
De waarde 17 die je krijgt is dan dus $g - 1$, zodat nu $g = 18$.
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X \geq g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
In dit geval gebruik je dat $P(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) > 0,90$.
Ga na, dat nu $g = 29$.



3 Kanshistogrammen

Bij een binomiale kansverdeling kun je een kanshistogram maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat kun je zo doen:

- Ga naar het menu **STATISTICS**.
(Maak eventueel eerst de eerste twee lijsten leeg, zie het practicum "Statistiek en de Casio fx CG-50".)
- Ga op "List 1" staan. Toets **OPTN**, **F1**(List) en **F5**(Seq).
- Voer achter Seq(in $x, x, 0, 100, 1$) en **EXE**.
- Hiermee heb je in List 1 de getallen 0 t/m 100 gezet. Ga dat na door met de pijltjes toetsen door de lijst te lopen.
- Voer in List 2 de kansen in door op "List 2" te gaan staan en weer **OPTN**, **F1**(List) en **F5**(Seq) te toetsen.
Omdat je helaas nu de functie BinomialPD niet kunt gebruiken, vul je dit aan met $100 C x \times 0.23^x \times 0.77^{100-x}$, $x, 0, 100, 1$) en **EXE**. Je vindt $100 C x$ door eerst 100 in te voeren en dan **OPTN**, **F5**(PROB) en **F3**(nCr) te toetsen, gevolgd door **X, 0, T**.
Nu staan in List 2 de bijbehorende kansen. Controleer dat.
- Nu je List 1 en List 2 hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken.
Ga via **EXIT** terug naar het beginscherm met beide lijsten.
- Toets **F1**(GRAPH) en **F6**(SET).
Kies voor een histogram. Vul verder in: XList = List 1 en Frequency = List 2.
Druk op **EXE** en **F1**(GRAPH1). Laat het diagram starten bij 10 met breedte 1.



Oefen jezelf door zo een paar kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken. Cumulatieve kanshistogrammen lukken ook.

Als je een kansverdeling als lijst in de Casio fx-CG50 hebt ingevoerd, dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- Het centrum van de kansverdeling van X is de **verwachting**, aangegeven met μ_X of $\bar{X}$.
- De spreiding van de kansverdeling van X is de **standaardafwijking**, aangegeven met σ_X .

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je via **EXIT** weer terug naar het startmenu met beide ingevoerde lijsten. Toets **F2**(CALC) en **F6**(SET) om in te stellen met welke kolommen moet worden gerekend: 1Var XList = List1 en 1Var Freq = List2 en **EXE**. Toets nu **F1**(1-VAR) en je vind de juiste gegevens.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. De resultaten vind je in de onderste figuur. De verwachting is 23 en de standaarddeviatie is ongeveer 4,21.



4 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

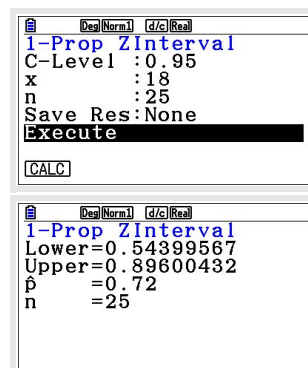
Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.

Het aantal successen in deze steekproef is 18

Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie.

- Ga naar het menu **STATISTICS**. Als je niet op de startpagina met de lijsten terecht komt, toets je een paar maal **EXIT**.
- Toets op de startpagina **F4**(INTR) (van "interval"), dan **F1**(Z) en **F3**(1-PROP).
- Voer vervolgens in x: 18 en n: 25 en C-Level: 0.95 (C van confidence) en Execute **EXE**.
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval [0,544; 0,896] en ook zie je de proportie $0,72 = \frac{18}{25}$. Zie de figuur.



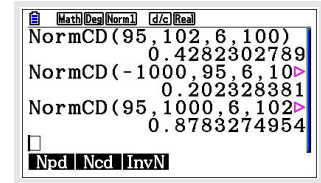
In drie decimalen nauwkeurig ligt het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie tussen 0,544 en 0,896.



5 De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je in het menu **RUN-MATRIX** de volgende kansen berekenen met de Casio fx-CG50.

- $P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,4282\dots$
Toets **OPTN**, **F5**(STAT), **F3**(DIST), **F1**(NORM) en **F2**(Ncd).
Vul in NormCD(95,102,6,100) en **EXE**.
- $P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,2023\dots$
Toets **OPTN**, **F5**(STAT), **F3**(DIST), **F1**(NORM) en **F2**(Ncd).
Vul in NormCD(-1000,102,6,100) en **EXE**.
- $P(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 1 - P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,7976\dots$
Toets **OPTN**, **F5**(STAT), **F3**(DIST), **F1**(NORM) en **F2**(Ncd).
Vul in NormCD(95,1000,6,100) en **EXE**.



Loop al deze berekeningen zelf na!

Bij een normale kansverdeling kun je op de Casio fx-CG50 de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je het menu **STATISTICS**.

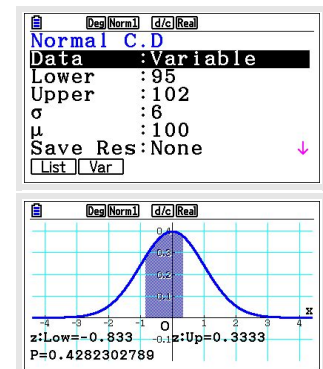
Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

$$P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,4282\dots$$

Je voorziet eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld x laat je tussen 80 en 120 lopen en y (dat zijn de waarden bij de normaalkromme) tussen -0,1 en 0,2. Zorg dat er geen functies meer zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:

- Ga naar de startpagina van het menu **STATISTICS** en toets **F5**(DIST), **F1**(NORM) en **F2**(Ncd).
- Een nieuw venster opent. Vul de gegevens zoals hiernaast in, ga naar Execute en toets **F6**(DRAW).
- De tweede figuur hiernaast komt dan in beeld.

Je ziet onderaan achter $P=$ de bijbehorende kans. De twee z -waarden zijn de bijbehorende grenzen van de standaardnormale verdeling.



6 Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de Casio fx-CG50. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

- $P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$
Ga naar het menu **STATISTICS** en toets **F5**(DIST), **F1**(NORM) en **F3**(InvN).
Het gaat om de kans dat X kleiner dan een bepaalde grenswaarde is, dus Tail: Left (de "staart naar links"). Voer vervolgens in Area: 0.20, σ : 6 en μ : 100 en **EXE**.
Je vindt $g = 94,9502726$ dus $g \approx 95$.
- $P(X > g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$ geeft $P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,80$
Dit doe je dan op een vergelijkbare wijze, nu krijg je $g \approx 105$.

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!



7 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Dat bereken je met een speciale functie: z-interval.

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma_X = 4$.

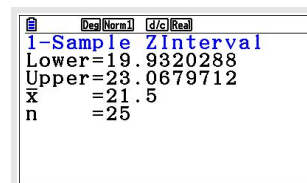
Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.

Het gemiddelde van deze steekproef $\bar{X} = 21,5$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aan nemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is en dus de z -verdeling gebruiken.

- Ga naar het menu **STATISTICS**. Als je niet op de startpagina met de lijsten terecht komt, toets je een paar maal **EXIT**.
- Toets op de startpagina **F4**(INTR) (van "interval"), dan **F1**(Z) en **F1**(1-SAMPLE).
- Vul in σ : 4, $\bar{x}$: 21.5, n : 25 en C-level: 0.95 en Execute **EXE**.



	Des	(Norm)	d/c	Real
1-Sample Z Interval				
Lower	=	19.9320288		
Upper	=	23.0679712		
$\bar{x}$	=	21.5		
n	=	25		

In de figuur zie je het resultaat.

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1.



8 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen

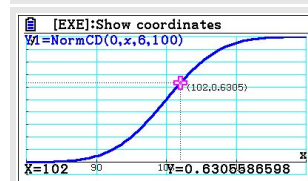
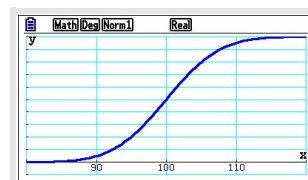
Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met NormCD. Je kunt in het menu **GRAPH** deze cumulatieve normale verdeling invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$$P(X < 102 | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6)$$

Daarvoor ga je zo te werk:

- Ga eerst naar het menu **GRAPH** en haal alle ingevoerde functies weg.
- Toets **OPTN**, **F6**(►), **F3**(STAT), **F1**(DIST), **F1**(NORM) en **F2**(Ncd).
- Vul in: NormCD(0,x,6,100).
- Plot vervolgens de grafiek door op **F6**(DRAW) te drukken.



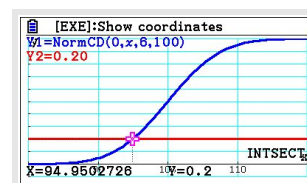
Voorzie nu je grafiekscherm van de goede instellingen, laat x bijvoorbeeld lopen tussen 80 en 120 en y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaal-kromme) tussen -0,1 en 1. Toets nu **F1**(Trace) om over de grafiek te lopen en kansen te bepalen. Typ $x = 102$ in om de precieze kans te bepalen: 0,6305...

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans. Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$$P(X < g | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$$

Je voert dan voor Y1 de cumulatieve normaal-kromme in (net als hiervoor) en voor Y2 de gegeven kans 0,2.

Met behulp van **F5**(G-Solv), **F5**(INTSECT) vind je dat $g = 94,95027...$, dus $g \approx 95$.



Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X de **standaardafwijking** bepalen als gegeven:

$$P(X < 102 | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??) = 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij Y1 NormCD in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\sigma = x$ en $\mu = 100$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 7,8943...$

Dus is de standaarddeviatie in dit geval $\sigma \approx 7,9$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X het **gemiddelde** bepalen als gegeven:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij Y1 NormCD in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\sigma = 6$ en $\mu = x$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu gemiddelde!) loopt van 80 tot zeg 120 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 100,4799\dots$

Dus is het gemiddelde in dit geval $\sigma \approx 100,5$.



