

Kansverdelingen met de TI-84

Met de TI-84 kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de TI-84 en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.

Loop eerst het practicum: 'Simulaties en telsystemen met de TI-84' door.

Inhoud

- [De binomiale kansverdeling](#)
 - [Grenswaarden bij binomiale toetsing](#)
 - [Betrouwbaarheidsinterval bij binomiale kansverdelingen](#)
 - [Kanshistogrammen, verwachting en standaarddeviatie](#)
 - [De normale kansverdeling](#)
 - [Grenswaarden bij normale kansverdelingen](#)
 - [Betrouwbaarheidsinterval bij normale kansverdelingen](#)
 - [Gemiddelde of standaarddeviatie bij normale kansverdeling berekenen](#)
-

De binomiale kansverdeling

Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0,23 = 0,77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

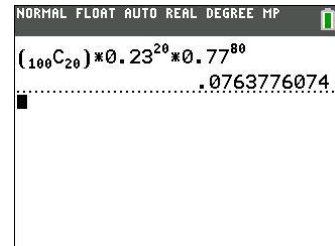
$$P(x = k) = \binom{100}{k} * (0,23)^k * (0,77)^{100-k}$$

hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(100-k)!}$ wat er op je TI-84 uit ziet als 100 nCr k.

De kans op $X = 20$ is dan gewoon in je rekenvenster te bepalen door te tikken:

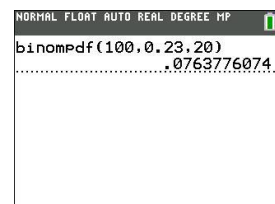
- ▢ 100 **MATH** ga naar de tab PROB en kies 3: nCr.
- Vervolg met 20 ▢ ▢ ▢ .23 ▢ 20 ▢ ▢ .77 ▢ 80 en **ENTER**.

Het antwoord zie je in het TI-venster hiernaast.



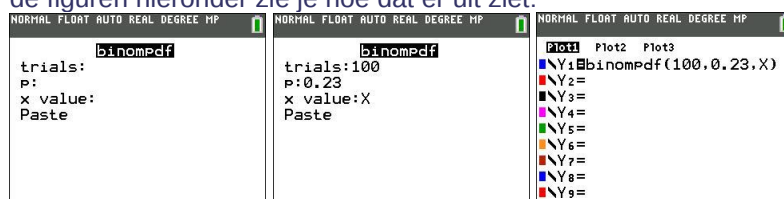
Dit kan echter gemakkelijker. De TI-84 kent namelijk de functie 'binompdf' (binomial probability distribution function) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

- Toets **2nd****VARS**, je hebt dan het DISTR-menu (distribution = verdeling).
- Kies A: binompdf en **ENTER** (als je niet de pijltjestoetsen gebruikt maar alleen A toetst is **ENTER** overbodig).
- Je ziet nu het venster hiernaast. Als dit niet het geval is, druk dan op **MODE** en zet STAT WIZARDS op ON.
- Voer bij *trials* 100 in, geef *p* de waarde 0.23 en maak de *x value* 20.
- Ga vervolgens naar *paste* en druk op **ENTER**. De functie verschijnt nu in je rekenscherf.
- Druk nog eens op **ENTER** om de berekening uit te voeren.



Je vindt dezelfde kans als hierboven.

De complete kansverdeling is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele X in het $Y=$ scherm als functie in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet:



De hierboven gevonden waarde voor $x = 20$ vind je in de tabel terug.

Als een variabele X binomiaal is verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,23$ dan kun je de volgende binomiale kansen berekenen met de TI-84:

- $P(X = 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,0763\dots$**
 - Eerst: **2nd****VARS** om naar het menu DISTR (distributions = verdelingen) te komen
 - Kies A: binompdf(.
 - Vul de *trials*(n), p en *x value*(X) in en voer de berekening uit.
- $P(X \leq 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2810\dots$**
 - 2nd****VARS** en kies B: binomcdf(.
 - Vul de *trials*(n), p en *x value*(X) in en voer de berekening uit.
- $P(X < 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 19 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2046\dots$**
 - 2nd****VARS** en kies B: binomcdf(.
 - Vul de *trials*(n), p en *x value*(X) in en voer de berekening uit.

- $P(X > 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7189...$
 - Toets 1 $\square$ 2nd $\square$ VARS en kies B: binomcdf(.
 - Vul de *trials*(n), *p* en *x value*(X) in en voer de berekening uit.
- $P(X \geq 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 19 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7953...$
 - Toets 1 $\square$ 2nd $\square$ VARS en kies B: binomcdf(.
 - Vul de *trials*(n), *p* en *x value*(X = 19) in en voer de berekening uit.



Grenswaarden bij binomiale toetsing

Vooral bij het **toetsen van hypothesen** wil je grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen. Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X \leq g \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als functie in het Y= scherm en dan de tabel van die functie (stapgrootte 1) in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 13$.

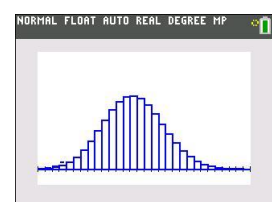
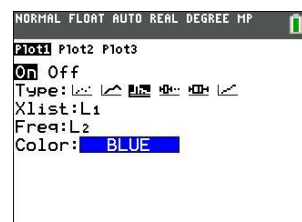
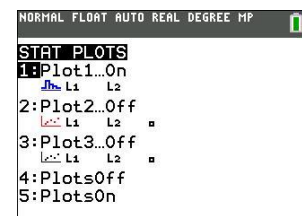
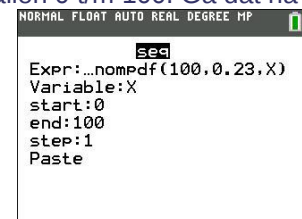
NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP	NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP	NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP	PRESS + FOR Δ Tb1			
binomcdf	Plot1 Plot2 Plot3	X Y1				
trials:100	Y1= binomcdf(100,0.23,X)	16 .02409				
p:0.23	Y2=	17 .03556				
x value:X	Y3=	18 .04898				
Paste	Y4=	19 .06314				
	Y5=	20 .07638				
	Y6=	21 .08691				
	Y7=	22 .09322				
	Y8=	23 .09443				
	Y9=	24 .0905				
		25 .08218				
		26 .07081				
		X=20				



Kanshistogrammen, verwachting en standaarddeviatie

Bij een binomiale kansverdeling kun je een **kanshistogram** maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat kun je zo doen:

- Toets **[STAT]** en kies 1: Edit...
Je ziet nu een aantal lijsten L_1 , L_2 , enzovoorts.
- Voer in L_1 de waarden voor de stochast $X = 0, 1, 2, \dots, 100$ in door de cursor op L_1 te zetten en **[ENTER]** te toetsen. Onderaan zie je nu $L_1=$ met daarachter de cursor.
- Ga naar **[2nd][STAT]** en naar de tab OPS. Kies 5: seq. Een nieuw venster opent nu.
- Zet achter *Expr* en *Variable* een X. Zet bij *start* 0, bij *end* 100 en bij *step* 1.
- Ga nu naar *paste* en druk twee keer op **[ENTER]**. In L_1 staan nu de getallen 0 t/m 100. Ga dat na door met de pijltjes toetsen door de lijst te lopen.
- Voer in L_2 de kansen in door de cursor op L_2 te zetten en **[ENTER]** te toetsen. Onderaan zie je nu $L_2=$ met daarachter de cursor. Ga naar **[2nd][STAT]** en naar de tab OPS.
- Kies 5: seq. Een nieuw venster opent nu.
- Ga achter *Expr* staan en ga naar: **[2nd][VAR]** en kies A: binompdf. Je ziet nu binompdf(achter *Expr* verschijnen.
- Vul in: 100 **[,]** 0.23 **[,]** X **[)]** en toets **[ENTER]**. Let erop dat je komma's gebruikt en geen punt.
- Zet achter *Variable* een X, bij *start* een 0, bij *end* 100 en bij *step* een 1. Ga vervolgens naar *paste* en druk twee keer op **[ENTER]**. Nu staan in L_2 de bijbehorende kansen. Controleer dat.
- Nu je de lijsten L_1 en L_2 hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken met behulp van STAT PLOT. Je bereikt dat met: **[2nd][Y=]**. Je krijgt dan de figuur hiernaast.
- Kies je voor 1: Plot1, dan kun je het eerste diagram instellen, je ziet dan de onderste figuur hiernaast.
- Kies voor On **[ENTER]** en loop met de pijltjestoetsen naar en door Type. Kies het type plaatje, controleer of Xlist op L_1 en Freq op L_2 staat ingesteld. Indien dat niet het geval is, zorg daar dan voor (Je vindt L_1 , L_2 , enzovoorts op de cijfertoetsen via **[2nd]**). Door **[GRAPH]** te toetsen zou het gekozen diagram in beeld moeten komen, afhankelijk van de scherminstellingen. Omdat er alleen voor X van 10 t/m 40 kansen uitkomen die in beeld zijn te brengen, stel je voor X ook die waarden in. De uitkomsten liggen dan tussen 0 en 0,15.



Oefen jezelf door zo een paar kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken. Cumulatieve kanshistogrammen lukken ook.

Centrum en spreiding van een kanshistogram

Als je een kansverdeling als lijst in de TI-84 hebt ingevoerd (zie de voorgaande tekst), dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- De gebruikte centrummaat voor de kansverdeling van X is de **verwachting**, aangegeven met μ_X of $\bar{X}$.
- De gebruikte spreidingsmaat heet de standaardafwijking of **standaarddeviatie**, aangegeven met σ_X .

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je zo te werk:

- Toets **[STAT]**, ga naar de tab CALC en dan 1: 1-Var Stats
- Kies voor *List* de lijst met je waarnemingsgetallen(L_1) en voor *FreqList* de lijst met kansen(L_2).

- Ga nu naar *Calculate* en toets **ENTER**.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. In het plaatje zie je het eindresultaat. De verwachting is dus 23 en de standaarddeviatie is ongeveer 4,21.



```
NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP
1-Var Stats
x̄=23
Σx=23
Σx²=546.71
Sx=
σx=4.208325082
n=1
minX=0
↓Q1=20
```

Betrouwbaarheidsinterval bij binomiale kansverdelingen

(Dit wordt bijna alleen gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval.

Je kunt dit bij normale verdelingen snel bepalen met een speciale functie: z-interval.

Het gaat zo:

Opdracht:

Stochast X is binomiaal verdeeld.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.

Het aantal successen in deze steekproef, $X = 18$.

Wat is het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie?

Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Antwoord:

Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:

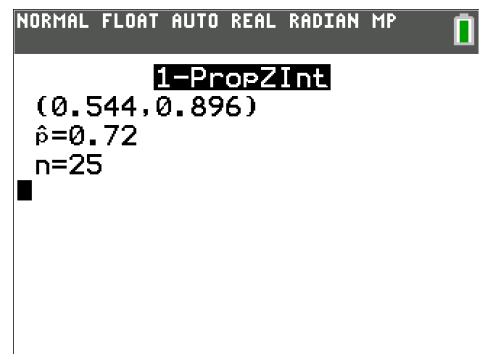
STAT -> TESTS -> kies A: 1-PropZInt -> z-Interval met 1 prop...

Vul in:

X , n en de betrouwbaarheid (als getal tussen 0 en 1).

Dit geeft het resultaat als in de afbeelding.

Het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie ligt dus tussen 0.544 en 0.896..



De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de TI-84:

- **$P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,4282...$**
 - Toets $\boxed{2\text{nd}}\boxed{\text{VARS}}$ om naar het menu DISTR (distributions = verdelingen) te komen.
 - Vul bij *lower*(ondergrens) 95 in, bij *upper*(bovengrens) 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar *paste* en druk tweemaal op $\boxed{\text{ENTER}}$.
- **$P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,2023...$**
 - toets $\boxed{2\text{nd}}\boxed{\text{VARS}}$ en kies 2: normalcdf(
 - Vul bij *lower*(ondergrens) $[-]$ 1000 in, bij *upper*(bovengrens) 95 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar *paste* en druk tweemaal op $\boxed{\text{ENTER}}$.
- **$P(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,7976...$**
 - toets $\boxed{2\text{nd}}\boxed{\text{VARS}}$ kies 2: normalcdf(
 - Vul bij *lower*(ondergrens) 95 in, bij *upper*(bovengrens) 1000 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar *paste* en druk tweemaal op $\boxed{\text{ENTER}}$.

Loop al deze berekeningen zelf na!

Bij een normale kansverdeling kun je op de TI-84 de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je het menu DISTR.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

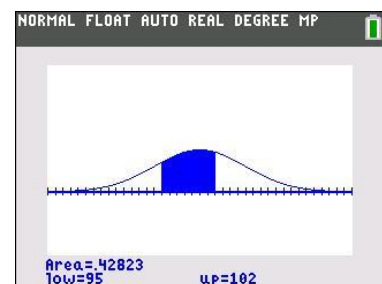
$$P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,4282...$$

Je voorziet eerst je grafiekscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld X laat je tussen 80 en 120 lopen en Y (dat zijn de waarden bij de normaalkromme) tussen $-0,1$ en $0,2$. Zorg dat er geen functies meer zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:

- $\boxed{2\text{nd}}\boxed{\text{VARS}}$ en naar de tab DRAW en je kiest 1: ShadeNorm($\boxed{\text{ENTER}}$.
- Een nieuw venster opent. Vul de gegevens hetzelfde als hierboven in, ga naar *Draw* en druk weer op $\boxed{\text{ENTER}}$.

De figuur hiernaast komt dan in beeld.

Met $\boxed{2\text{nd}}\boxed{\text{PRGM}}$ 1: ClrDraw gaat een figuur weer weg.



Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de TI-84. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

- **$P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,2023$ geeft: $g \approx 95$**
 - Toets `2nd``VAR`S en kies 3: `invNorm(`.
 - Toets `0.2023` `,` `100` `,` `6` `)` `ENTER`.
- **$P(X > g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,2023$ geeft: $g \approx 105$**

Omdat $P(X > g) = 1 - P(X < g)$, is nu: $P(X < g) = 1 - 0,2023 = 0,7977$. Daarom:

 - toets `2nd``VAR`S en kies 3: `invNorm(`.
 - toets `0.7977` `,` `100` `,` `6` `)` `ENTER`.

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!



Betrouwbaarheidsinterval bij normale kansverdelingen

(Dit wordt bijna alleen gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval.

Je kunt dit bij normale verdelingen snel bepalen met een speciale functie: z-interval.

Het gaat zo:

Opdracht:

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma = 4$.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.

Het gemiddelde van deze steekproef $\bar{X} = 21,5$.

Wat is het 95% betrouwbaarheidsinterval?

Geef je antwoord in 1 decimaal nauwkeurig.

Antwoord:

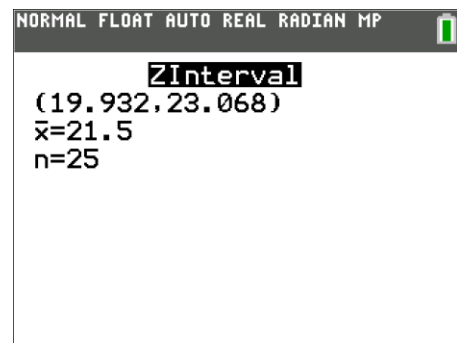
Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is.

Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:

STAT -> TESTS -> ZInterval

Kies bij Inpt: Stats, **enter**

Vul σ , $\bar{X}$, n en de betrouwbaarheid (als getal tussen 0 en 1).



Dit geeft het resultaat als in de afbeelding.

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1



Gemiddelde of standaarddeviatie bij normale kansverdeling berekenen

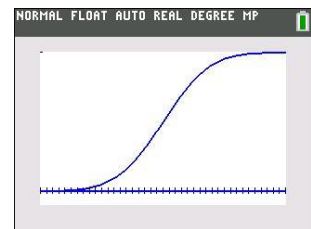
Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met normalcdf. Je kunt in het Y= scherm de *cumulatieve* normale verdeling normalcdf invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,2023...$$

Je voorziet eerst je grafiekscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld laat je X lopen tussen 80 en 120 en laat je Y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaalkromme) tussen $-0,1$ en 1 . Zorg dat er geen functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:

- $\boxed{Y=}$ om het invoerscherm te openen;
- $\boxed{2nd}\boxed{VARS}$ en je kiest 2: normalcdf(;
- In het verschenen venster vul je bij de ondergrens 0 in en bij de bovengrens X . Vul ook μ en σ zoals ze hierboven staan in.
- Ga naar *paste* en druk tweemaal op $\boxed{ENTER}$.
- Plot vervolgens de grafiek door op $\boxed{GRAPH}$ te drukken.



De figuur hiernaast komt dan in beeld.

Toets je nu $\boxed{TRACE}$ dan kun je met de cursor over de grafiek lopen en kansen bepalen. Dat is echter nogal grof. Via het Calc-menu en Value kun je echter de gevraagde kans bepalen: 0,6305...

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans. Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$$P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,6$$

Je voert dan voor Y_1 de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en voor Y_2 de gegeven kans 0,6. Met behulp van intersect vind je dat $g = 101,52...$

Verder kun je de **standaardafwijking bepalen** als bijvoorbeeld:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??) \approx 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij Y_1 een normalcdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102. Laat het gemiddelde μ weer 100 zijn. Vul X in voor de standaarddeviatie(σ) .
- Stel het venster zo in dat X (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en Y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen)
- Met intersect vind je nu als standaarddeviatie 7,8943...

Tenslotte kun je het **gemiddelde bepalen** als bijvoorbeeld:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij Y_1 een normalcdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102. Vul 6 in voor de standaarddeviatie. Vul X in voor het gemiddelde (μ).

- Voer ook $Y_2 = 0.6$ in.
- Stel het venster zo in dat X (dat is nu het gemiddelde!) loopt van 80 tot 120 en Y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen)
- Met intersect vind je nu als gemiddelde 100,4799...

